Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Wintersemester 2023/24

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra I*

Blatt 6

Abgabe: Freitag, den 08. Dezember 2023, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Beweismechanikaufgabe *(4 Punkte)*

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins, den wir im Folgenden mit R bezeichnen. Ein Element $x \in R$ heißt *Nullteiler von* R, wenn es ein $y \in R$, $y \neq 0$ mit $x \cdot y = 0$ gibt. Der Ring R heißt *nullteilerfrei*, wenn 0 der einzige Nullteiler in R ist. Ein Element $x \in R$ heißt *Einheit von* R, wenn es ein $y \in R$ mit $x \cdot y = 1$ gibt.

(a) Es sei $x \in R$, $x \neq 0$. Betrachte die Abbildung $f : R \to R$ mit $f(r) = x \cdot r$ für $r \in R$. Zeige: Ist x kein Nullteiler von R, dann ist die Abbildung f injektiv.

(b) Zeige: Ist $x \in R$ eine Einheit von R, dann ist x kein Nullteiler von R.

(c) Zeige: Ist R ein Körper, dann ist R nullteilerfrei.

Hinweis: Die Beweismechanik-Abgabe muss als Zweier-Team abgegeben werden. Speichern Sie Ihre gemeinsame Beweismechanik-Abgabe in einer PDF-Datei unter einem Namen der Form b1blattx-bma-ihrnachname-nachnameihrespartners.pdf *ab, wobei Sie x durch die Nummer des Übungsblattes, ihrnachname durch Ihren Nachnamen ersetzen usw. Laden Sie die Beweismechanik-Abgabe dann getrennt von den anderen Aufgaben auf der ILIAS-Seite der Vorlesung „Einführung in das mathematische Arbeiten I“ online unter „Abgabe Beweismechanik-Aufgabe – Vorlesung Lineare Algebra I“ hoch. Die Abgabe im Zweier-Team ist verpflichtend. Pro Zweier-Team bitte nur eine Abgabe!*

Aufgabe 6.1 *(1+1+2 Punkte)*

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ existiert, so dass

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(K) : \; A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ beliebig und seien $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Finden Sie Matrizen $B, C \in M_{n\times n}(K)$, so dass $(BAC)_{ij} = A_{ij}$ und $(BAC)_{lm} = 0$ für alle Tupel $(l, m) \neq (i, j)$.

(c) Sei $J \subseteq M_{n\times n}(K)$ eine Menge von $n \times n$-Matrizen über K mit folgenden Eigenschaften:

(i) J enthält eine Matrix $A \neq 0$;

(ii) J ist abgeschlossen unter Addition, d.h., $A, B \in J \Rightarrow A + B \in J$;

(iii) J ist abgeschlossen unter Links- und Rechtsmultiplikation mit Elementen aus $M_{n\times n}(K)$, d.h., für alle $A \in J$ und alle $X \in M_{n\times n}(K)$ gilt $AX \in J$ und $XA \in J$.

Zeigen Sie, dass bereits $J = M_{n\times n}(K)$ gilt.

Aufgabe 6.2 *(1+1+2 Punkte)*

Berechnen Sie die Inversen der folgenden Matrizen über den jeweiligen Körperm:

(a) $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{F}_2$.

(b) $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{F}_{13}$.

(c) $C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & 7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ -4 & -6 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 6.3 *(1+3 Punkte)*

(a) Seien K ein Körper und $(V, \cdot_V, +_V)$, $(W, \cdot_W, +_W)$ zwei K-Vektorräume. Wir betrachten $U := V \times W$ versehen mit

$$+_U : U \times U \to U,\ (v_1, w_1) +_U (v_2, w_2) := (v_1 +_V v_2, w_1 +_W w_2)$$

für $v_1, v_2 \in V$, $w_1, w_2 \in W$ und

$$\cdot_U : K \times U \to U,\ \lambda \cdot_U (v, w) := (\lambda \cdot_V v, \lambda \cdot_W w)$$

für $\lambda \in K$, $v \in V$, $w \in W$.

Zeigen Sie, dass $(U, \cdot_U, +_U)$ ein K-Vektorraum ist.

(b) Im Folgenden betrachten wir $F := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ zusammen mit der punktweisen Addition $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und $\mathbb{R}$-Skalarmultiplikation $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$ für $f, g \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Seien

$$F_1 := \{f \in F \mid \forall x \in \mathbb{R}\colon f(x) = f(-x)\},$$
$$F_2 := \{f \in F \mid \forall x \in \mathbb{R}\colon f(x) = -f(-x)\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $(F, \cdot, +)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und F_1, F_2 Unterräume von F sind.

Hinweis: Vgl. Aufgabe 1.4(a)

(ii) Bestimmen Sie $F_1 \cap F_2$ und $F_1 + F_2$.

Zusatzaufgabe für Interessierte. *(1+1+1+1 Bonuspunkte)*

Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass für alle $c \in K$, $\alpha \in V$ Folgendes gilt:

(a) $c \cdot 0 = 0$

(b) $0 \cdot \alpha = 0$

(c) $c \cdot \alpha = 0 \implies c = 0$ oder $\alpha = 0$

(d) $(-1) \cdot \alpha = -\alpha$

Glühwein | Snacks | Unterhaltung

Weihnachtsfeier

des Fachbereichs Mathematik und Statistik

12. Dezember 2023
ab 18 Uhr
in Raum G300

Bitte eigene Tasse mitbringen!